



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

162475

YBAJBL 0907MATC

VI

Nr. der
Abhandlung.

Heft. Seite.

dem Lehrer Herrn M. Curtze am Gymnasium
in Thorn

IV. 480

XXXIV. Rationale Dreiecke zu bilden, deren Seiten in
arithmetischer Progression und solche, in wel-
chen ein Winkel doppelt so gross ist als ein
anderer. Von Herrn Professor Dr. Ligowski
an der vereinigten Ingenieur- und Artillerie-
schule in Berlin

IV. 480

XXXIV. Zu beweisende merkwürdige analytische Rela-
tion. Von Herrn J. J. Walker.

IV. 481

Literarische Berichte *).

CLXXXIX. I. 1

CLXXXX. II. 1

CLXXXI. III. 1

CLXXXII. IV. 1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich be-
sonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Verschiedene Bemerkungen.

Von

Herrn Professor und Director *F. Strehlke*
in Danzig.

1.

Auflösung der Gleichungen

$$x^3 + y^3 = a, \quad x^2y + xy^2 = b.$$

(Siehe dieses Archiv Theil 47. Heft 1.)

Wenn man die zweite Gleichung mit 3 multiplicirt und zur ersten addirt, so erhält man den vollständigen Cubus von $x + y$, d. h.:

$$x + y = \sqrt[3]{a + 3b}.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man:

$$x^3(x - y) - y^3(x - y) = a - b,$$

daraus:

$$(x - y)^2 \cdot (x + y) = a - b,$$

folglich:

$$x - y = \pm \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt[3]{a + 3b}}.$$

Für den ersten Fall ist sonach die Fläche $\frac{6F}{\sqrt{2p}}$ durch die Abscissen und den Parameter ausgedrückt:

$$= x'^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x'} - \sqrt{x}) = (\sqrt{x'} - \sqrt{x})(x' + x + \sqrt{x'x} + \frac{3}{2}p);$$

allein durch p und y bestimmt ist:

$$12. F.p = (y' - y)(y'^2 + y^2 + y'y + 3p^2).$$

Da

$$\sqrt{x'} - \sqrt{x} = \sqrt{x + x' - 2\sqrt{x'x}},$$

so ist auch:

$$\begin{aligned} \frac{6F}{\sqrt{2p}} &= \sqrt{x + x' - 2\sqrt{x'x}} \cdot (x' + x + \sqrt{x'x} + \frac{3}{2}p) \\ &= \sqrt{r + r' - p - 2\sqrt{x'x}} \cdot (r + r' + \frac{1}{2}(p + 2\sqrt{x'x})). \end{aligned}$$

Wie sich leicht zeigen lässt, ist aber:

$$(p + 2\sqrt{x'x})^2 = (r' + r)^2 - s^2,$$

denn

$$\begin{aligned} (r' + r)^2 - s^2 &= (x + x' + p)^2 - (y' - y)^2 - (x' - x)^2 \\ &= (x + x')^2 + 2p(x + x') + p^2 - (x' - x)^2 - 2p(x' + x - 2\sqrt{x'x}) \\ &= 4x'x + p^2 + 4p \cdot \sqrt{x'x} \\ &= (p + 2\sqrt{x'x})^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\frac{r' + r + s}{2} = L^2,$$

$$\frac{r' + r - s}{2} = M^2;$$

so hat man:

$$r' + r = L^2 + M^2,$$

$$s = L^2 - M^2;$$

folglich:

$$\begin{aligned}\frac{6F}{\sqrt{2p}} &= \sqrt{L^2 + M^2 - 2LM} \cdot (L^2 + M^2 + LM) \\ &= (L - M)(L^2 + M^2 + LM) \\ &= L^3 - M^3 \\ &= \left(\frac{r' + r + s}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r' + r - s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Für den zweiten Fall, wenn der von r und r' gebildete Winkel $> 180^\circ$, ist:

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2}(x'y' + xy) + \frac{1}{2}p(y' + y), \\ \frac{6F}{\sqrt{2p}} &= (\sqrt{x'} + \sqrt{x})(x' + x - \sqrt{x'x} + \frac{1}{2}p) \\ &= \sqrt{r' + r + 2\sqrt{x'x} - p} \cdot (r + r' - \frac{1}{2}(2\sqrt{x'x} - p)).\end{aligned}$$

Hier ist:

$$s^2 = (y' + y)^2 + (x' - x)^2$$

und:

$$(r' + r)^2 - s^2 = (2\sqrt{x'x} - p)^2,$$

folglich mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}\frac{6F}{\sqrt{2p}} &= (L + M)(L^2 + M^2 - LM) \\ &= L^3 + M^3 \\ &= \left(\frac{r' + r + s}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{r' + r - s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Bemerkung des Herausgebers.

Ich darf mir wohl erlauben, hier auch auf meine drei Abhandlungen über die Quadratur parabolischer und elliptischer Sektoren im Archiv. Thl. XVI. No. XXXIX. S. 439. — Thl. XVII. No. XL. S. 313. — Thl. XX. No. XL. S. 207. zu verweisen.

$$E_A + E_B + E_C = E.$$

Wenn

$$0 < A < 120^\circ,$$

$$0 < B < 120^\circ,$$

$$0 < C < 120^\circ$$

t, so ist:

$$0 < A + B + C < 360^\circ,$$

woin kein Widerspruch liegt.

Wenn

$$120^\circ < A < 180^\circ,$$

$$120^\circ < B < 180^\circ$$

st, so ist

$$240^\circ < A + B < 360^\circ,$$

was nicht möglich ist; daher können nie zwei der Winkel A , B , C zwischen 120° und 180° liegen.

Wenn

$$0 < A < 60^\circ,$$

$$0 < B < 60^\circ,$$

$$0 < C < 60^\circ$$

st, so ist

$$0 < A + B + C < 180^\circ,$$

woin kein Widerspruch liegt.

Wenn

$$60^\circ < A < 180^\circ,$$

$$60^\circ < B < 180^\circ,$$

$$60^\circ < C < 180^\circ$$

st, so ist

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ,$$

was nicht möglich ist; also können nie alle drei Winkel A , B , C zwischen 60° und 180° liegen.

Den Nenner

$$3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C) \sqrt{3}$$

kann man noch auf eine andere bemerkenswerthe Art ausdrücken.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} \cos(-A+B+C+60^\circ) \\ + \cos(A-B+C+60^\circ) \\ + \cos(A+B-C+60^\circ) \end{array} \right\} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \{ \cos(2A-60^\circ) + \cos(2B-60^\circ) + \cos(2C-60^\circ) \},
\end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned}
-A+B+C+60^\circ &= 180^\circ - (2A-60^\circ), \\
A-B+C+60^\circ &= 180^\circ - (2B-60^\circ), \\
A+B-C+60^\circ &= 180^\circ - (2C-60^\circ)
\end{aligned}$$

ist.

Folglich ist:

$$\begin{aligned}
&\sin A \sin B \sin C \sqrt{3} \pm (1 + \cos A \cos B \cos C) \\
&= \pm \frac{3}{4} \mp \frac{1}{4} \{ \cos(2A \pm 60^\circ) + \cos(2B \pm 60^\circ) + \cos(2C \pm 60^\circ) \},
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&3 \sin A \sin B \sin C \pm (1 + \cos A \cos B \cos C) \sqrt{3} \\
&= \pm \{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} [\cos(2A \pm 60^\circ) + \cos(2B \pm 60^\circ) + \cos(2C \pm 60^\circ)] \} \sqrt{3},
\end{aligned}$$

und wenn man $\sqrt{3}$ nach den obigen Regeln positiv und negativ nimmt, allgemein:

$$\begin{aligned}
&3 \sin A \sin B \sin C + (1 + \cos A \cos B \cos C) \sqrt{3} \\
&= \{ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} [\cos(2A \pm 60^\circ) + \cos(2B \pm 60^\circ) + \cos(2C \pm 60^\circ)] \} \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
&\cos(2A \pm 60^\circ) + \cos(2B \pm 60^\circ) + \cos(2C \pm 60^\circ) \\
&= 2 \cos(A+B \pm 60^\circ) \cos(A-B) + 1 - 2 \sin(C \pm 30^\circ)^2,
\end{aligned}$$

also, weil

$$(A+B \pm 60^\circ) + (C \pm 30^\circ) = \begin{cases} 270^\circ \\ 90^\circ \end{cases}$$

folglich

$$A+B \pm 60^\circ = \begin{cases} 270^\circ - (C+30^\circ) \\ 90^\circ - (C-30^\circ) \end{cases}$$

und daher

$$\cos(A+B \pm 60^\circ) = \mp \sin(C \pm 30^\circ)$$

ist:

$$\begin{aligned}
&\cos(2A \pm 60^\circ) + \cos(2B \pm 60^\circ) + \cos(2C \pm 60^\circ) \\
&= 1 \mp 2 \sin(C \pm 30^\circ) \cos(A-B) - 2 \sin(C \pm 30^\circ) \\
&= 1 \mp 2 \{ \cos(A-B) \pm \sin(C \pm 30^\circ) \} \sin(C \pm 30^\circ) \\
&= 1 \mp 2 \{ \cos(A-B) + \cos(C \mp 60^\circ) \} \sin(C \pm 30^\circ),
\end{aligned}$$

gleich:

$$\angle AOB = 120^\circ.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 3. der Punkt O in dem Raume A_1AM liegt, so ist:

$$X = -AD, Y = +DO; X' = +BD, Y' = +DO;$$

so:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}}{1 + \frac{X}{Y} \cdot \frac{X'}{Y'}} &= - \frac{\frac{AD}{DO} - \frac{BD}{DO}}{1 + \frac{AD}{DO} \cdot \frac{BD}{DO}} = \frac{\frac{BD}{DO} - \frac{AD}{DO}}{1 + \frac{BD}{DO} \cdot \frac{AD}{DO}} \\ &= \tan(BOD - AOD) = \tan AOB = -\sqrt{3}, \end{aligned}$$

gleich:

$$\angle AOB = 120^\circ,$$

was ungereimt ist, da AOB offenbar nur ein spitzer Winkel sein kann; daher kann der Punkt O in dem Raume A_1AM nicht liegen.

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 4. der Punkt O in dem Raume B_1BN liegt, so ist:

$$X = +AD, Y = +DO; X' = -BD, Y' = +DO;$$

so:

$$\frac{\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}}{1 + \frac{X}{Y} \cdot \frac{X'}{Y'}} = \frac{\frac{AD}{DO} - \frac{BD}{DO}}{1 + \frac{AD}{DO} \cdot \frac{BD}{DO}} = \tan(AOD - BOD) = \tan AOB = -\sqrt{3},$$

gleich:

$$\angle AOB = 120^\circ,$$

was ungereimt ist, da AOB offenbar nur ein spitzer Winkel sein kann; daher kann der Punkt O in dem Raume B_1BN nicht liegen.

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 5. der Punkt O in dem Raume $M'ABN'$ liegt, so ist:

$$X = +AD, Y = -DO; X' = +BD, Y' = -DO;$$

so:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}}{1 - \frac{X}{Y} \cdot \frac{X'}{Y'}} &= - \frac{\frac{AD}{DO} + \frac{BD}{DO}}{1 - \frac{AD}{DO} \cdot \frac{BD}{DO}} = - \tan(AOD + BOD) \\ &= - \tan AOB = -\sqrt{3}, \end{aligned}$$

Dreiecke ABC , liegen; im ersten Falle ist $\angle AOB = 120^\circ$, im zweiten Falle ist $\angle AOB = 60^\circ$.

Wir wollen ferner den zweiten der beiden obigen in Rede stehenden Fälle, in welchem $\sqrt{3}$ negativ zu nehmen, und nach dem Obigen also:

$$\frac{\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}}{1 - \frac{X}{Y} \cdot \frac{X'}{Y'}} = \sqrt{3}$$

zu setzen ist, betrachten.

Wenn wieder mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 2. der Punkt O in dem Raume $MABN$ liegt, so ist:

$$X = +AD, \quad Y = +DO; \quad X' = +BD, \quad Y' = +DO;$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}}{1 - \frac{X}{Y} \cdot \frac{X'}{Y'}} &= \frac{\frac{AD}{DO} + \frac{BD}{DO}}{1 - \frac{AD}{DO} \cdot \frac{BD}{DO}} = \tan(AOD + BOD) \\ &= \tan AOB = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

folglich:

$$\angle AOB = 60^\circ.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 3. der Punkt O in dem Raume A_1AM liegt, so ist:

$$X = -AD, \quad Y = +DO; \quad X' = +BD, \quad Y' = +DO;$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{X}{Y} + \frac{X'}{Y'}}{1 - \frac{X}{Y} \cdot \frac{X'}{Y'}} &= -\frac{\frac{AD}{DO} - \frac{BD}{DO}}{1 + \frac{AD}{DO} \cdot \frac{BD}{DO}} = -\frac{\frac{BD}{DO} - \frac{AD}{DO}}{1 + \frac{BD}{DO} \cdot \frac{AD}{DO}} \\ &= \tan(BOD - AOD) = \tan AOB = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

folglich:

$$\angle AOB = 60^\circ.$$

Wenn mit Rücksicht auf Taf. I. Fig. 4. der Punkt O in dem Raume B_1BN liegt, so ist:

$$X = +AD, \quad Y = +DO; \quad X' = -BD, \quad Y' = +DO;$$

men, für welchen die Summe seiner Entfernungen von den drei Ecken des Dreiecks ein Minimum ist.

A u f l ö s u n g.

Wir wollen das gegebene Dreieck durch $AA'A''$ und den gesuchten Punkt durch O bezeichnen; seine Entfernungen von den Ecken A, A', A'' seien beziehungsweise s, s', s'' : so soll also der Punkt O so bestimmt werden, dass die Summe

$$u = s + s' + s''$$

ein Minimum wird.

Um der Entwicklung möglichste Symmetrie zu verleihen, nehmen wir in der Ebene des Dreiecks ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy an, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten von A, A', A'' beziehungsweise durch $a, b; a', b'; a'', b''$; die Coordinaten von O durch x, y . Dann ist:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \\ s' &= \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2}, \\ s'' &= \sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2}; \end{aligned}$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{x-a}{s}, & \frac{\partial s'}{\partial x} &= \frac{x-a'}{s'}, & \frac{\partial s''}{\partial x} &= \frac{x-a''}{s''}; \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{y-b}{s}, & \frac{\partial s'}{\partial y} &= \frac{y-b'}{s'}, & \frac{\partial s''}{\partial y} &= \frac{y-b''}{s''}. \end{aligned}$$

Die gemeinschaftlichen Bedingungen des Maximums und Minimums liefern bekanntlich die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s'}{\partial x} + \frac{\partial s''}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s'}{\partial y} + \frac{\partial s''}{\partial y} = 0; \end{aligned}$$

also nach dem Vorhergehenden die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{x-a}{s} + \frac{x-a'}{s'} + \frac{x-a''}{s''} &= 0, \\ \frac{y-b}{s} + \frac{y-b'}{s'} + \frac{y-b''}{s''} &= 0; \end{aligned}$$

aus denen folglich die Coordinaten x, y zu bestimmen sind.

I.

$$y = 2\kappa\pi + x,$$

$$z = 2\lambda\pi + x;$$

$$3x + 2(\kappa + \lambda)\pi = a,$$

$$x = \frac{a - 2(\kappa + \lambda)\pi}{3};$$

$$\cos y = \cos x, \quad \cos z = \cos x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\cos x;$$

$$\Omega = \cos x^2 - 4\cos x^2 = -3\cos x^2,$$

$$\Omega \text{ nicht } > 0.$$

II.

$$y = 2\kappa\pi + x,$$

$$z = (2\lambda' + 1)\pi - x;$$

$$x + \{2(\kappa + \lambda') + 1\}\pi = a,$$

$$x = a - \{2(\kappa + \lambda') + 1\}\pi;$$

$$\cos y = \cos x, \quad \cos z = -\cos x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos x;$$

$$\Omega = \cos x^2,$$

$$\Omega \text{ nicht } < 0.$$

III.

$$y = (2\kappa' + 1)\pi - x,$$

$$z = 2\lambda\pi + x;$$

$$x + \{2(\kappa' + \lambda) + 1\}\pi = a,$$

$$x = a - \{2(\kappa' + \lambda) + 1\}\pi;$$

$$\cos y = -\cos x, \quad \cos z = \cos x;$$

$$\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 25, \dots;$$

h. überhaupt nur

$$\pm (6\mu + 1), \pm (6\mu - 1);$$

also, insofern μ positiv und negativ sein kann, nur $\pm (6\mu + 1)$ setzen; so dass also nach dem Obigen nur

$$x = \mp \frac{(6\mu + 1)\pi}{3}$$

gesetzt werden kann. Weiss man nun, dass x positiv und kleiner als $\frac{5\pi}{3}$ ist, so kann man offenbar bloss $\mu = 0$ setzen und das kleinere Zeichen nehmen, woraus sich

$$x = \frac{1}{3}\pi$$

ergiebt.

Weil nun ferner:

$$y = 2\kappa\pi + x = 2\kappa\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{(6\kappa + 1)\pi}{3},$$

$$z = 2\lambda\pi + x = 2\lambda\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{(6\lambda + 1)\pi}{3}$$

ist; so kann man, wenn man weiss, dass auch y und z positiv und kleiner als $\frac{5\pi}{3}$ sind, nur $\kappa = 0$ und $\lambda = 0$, also

$$y = \frac{1}{3}\pi, \quad z = \frac{1}{3}\pi$$

setzen.

Unter den gemachten Voraussetzungen, die u. A. immer für die Winkel des ebenen Dreiecks gültig sind, giebt es also für den Fall des Maximums nur die eine Auflösung:

$$x = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ,$$

$$y = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ,$$

$$z = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ.$$

Der Werth des Maximums von u ist:

$$\cos 60^\circ + \cos 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{3}{2},$$

und diesen Werth kann also

$$u = \cos x + \cos y + \cos z$$

unter den gemachten Voraussetzungen niemals übersteigen.

$$FC:AC = DG:AD$$

oder:

$$y:r = \sqrt{r^2 - x^2}:x,$$

was quadriert:

$$x^2 y^2 = r^2 (r^2 - x^2)$$

oder schliesslich:

$$y^2 = \frac{r^2(r^2 - x^2)}{x^2},$$

die Gleichung der „Muschellinie“, liefert.

Polargleichung der Curve. Die Transformation der Vergleichung auf Polarcoordinaten liefert mit Hülfe der Transformationsformeln:

$$x = u \cos t \quad \text{und} \quad y = u \sin t$$

die Gleichung:

$$u^4 \sin^2 t \cos^2 t + u^2 r^2 \cos^2 t - r^4 = 0,$$

welche in keinerlei Weise als einfach anzusehen ist.

Es ist wohl hier der Ort, die Gleichungen der Tangente Tt , Subtangente ST , Normale Nn , Subnormale Sn , Krümmungs-Halbmessers ρ anzugeben, als auch die Dratur und Kubatur vorzunehmen.

T a n g e n t e.

$$Tt = y \sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}} = y \sqrt{\frac{4r^4 y^2 + 3r^2 y^4 + y^6 + r^6}{(r^2 + y^2)^3}}.$$

S u b t a n g e n t e.

$$ST = y \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x(x^2 - r^2)}{r^2}.$$

N o r m a l e.

$$Nn = y \sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}} = \frac{1}{r^2} \sqrt{4r^4 y^2 + 3r^2 y^4 + y^6 + r^6}.$$

S u b n o r m a l e.

$$SN = y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{r^4}{x^3}.$$

K r ü m m u n g s h a l b m e s s e r.

$$\rho = -\frac{\left[1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\frac{[r^2(x^4 + r^4) - x^6]^{\frac{3}{2}}}{r^3 x^3 (2r^2 - 3x^2)}.$$

Q u a d r a t u r.

$$F = \int y \partial x,$$

$$F = r \int \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} \cdot \partial x.$$

Aufgabe besteht nun darin, den Werth dieses Integrals zu finden; zu diesem Behufe setze man:

$$\sqrt{r^2 - x^2} = z,$$

Es folgt:

$$r^2 - x^2 = z^2, \quad x = \pm \sqrt{r^2 - z^2} \quad \text{und} \quad \partial x = \frac{-z \partial z}{\pm \sqrt{r^2 - z^2}}$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ist:

$$F = r \int \frac{-z^2}{[\pm \sqrt{r^2 - z^2}]^2} \cdot \partial z$$

$$F = r \int \frac{-z^2 \partial z}{r^2 - z^2}.$$

Ausdruck $\frac{z^2}{r^2 - z^2}$ zerlege man in die Partialbrüche:

$$\frac{z^2}{r^2 - z^2} = \frac{Az}{r + z} + \frac{Bz}{r - z};$$

Berechnet man nun auf die bekannte Weise die Werthe für A und B, so wird $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$, sonach:

$$\frac{z^2}{r^2 - z^2} = \frac{-z}{2(r + z)} + \frac{z}{2(r - z)}.$$

Setzt man diese Werthe ein, erhält man:

Wird $\beta = \gamma$, so geht die Gleichung 5) über in:

$$6) \dots (1-x)^n = (1+n\delta)^{n-1} - n[1+(n-1)\delta]^{n-2}[x+(n-1)\delta] + \dots \\ + (-1)^{n-2} n_2 (1+2\delta) (x+2\delta)^{n-2} + (-1)^{n-1} n (x+\delta)^{n-2} + (-1)^n:$$

Auch kann man unmittelbar aus 2) die Abel'sche Gleichung erhalten:

$$7) \dots (x+\xi)^n = x^n + n\xi(x+\alpha)^{n-1} + n_2 \xi(\xi-2\alpha)(x+2\alpha)^{n-2} \\ + n_3 \xi(\xi-3\alpha)^2(x+3\alpha)^{n-3} + \dots \\ + n\xi[\xi-(n-1)\alpha]^{n-2}[x+(n-1)\alpha] + \xi(\xi-n\alpha)^{n-1}.$$

IX.

Ableitung der Complunationsformel in Polarcoordinaten aus der Figur.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am Bauernmarkte u. s. w. in Wien.

Es sei M in Taf. III. Fig. 3. ein Punkt der krummen Fläche mit den Coordinaten r, α, u für O als Pol. Man lege durch O und Ox eine Ebene und beschreibe in derselben aus O den unendlich kleinen Bogen $Mn = r d\alpha$. Es sei $MK \perp Ox$, $\angle MKM = u$, und man drehe die Ebene OMK um Ox um den unendlich kleinen Winkel du ; hierdurch kommt Mn nach pq und ist $Mq = np = MK \cdot du = r \sin \alpha \cdot du$.

Die Figur $Mnpq$ ist ein unendlich kleines Rechteck auf der Oberfläche einer Kugel vom Mittelpunkt O und vom Radius

En suite que, pour trouver leurs valeurs pour un argument réel quelconque, il ne faut que trouver leurs valeurs pour chaque argument num. $\leq K$.

§. 2.

Sur la périodicité et les coefficients différentiels des fonctions elliptiques.

1. On voit aisément ¹⁾ que chaque argument numér. $> K$ est

$$(18) \dots = \text{quelque argum. } \mathfrak{A} \text{ (num. } \leq K) + 2\mu K,$$

(μ étant de valeur numér. entière).

Etant ainsi, cherchons d'abord

$\text{am}(\mathfrak{A} + 2mK)$, m nombre entier,

c'est-à-d. la valeur de ψ qui satisfait à l'équation

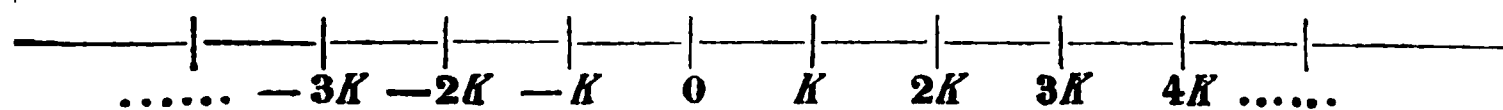
$$F(\psi, k) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \mathfrak{A} + 2mK$$

$$= \mathfrak{A} + 2m \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

plutôt — puisque, n étant nombre entier, évidemment

$$n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \text{ est } = \int_0^{n \cdot \frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad ^2), \quad -$$

1) En effet, il suffira évidemment de la seule inspection de cette figure-ci :



2) En effet ce dernier membre est

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi + \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} + \dots + \int_{(n-1) \cdot \frac{1}{2}\pi}^{n \cdot \frac{1}{2}\pi};$$

plus

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}, \text{ si l'on pose } \chi = \pi - \varphi,$$

$$\text{donc } = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

que φ passe par toutes valeurs réelles possibles, α atteindra tôt ou tard une certaine valeur particulière α_1 ; soit φ_1 la valeur correspondante de φ , c. à d. soit

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \alpha_1.$$

Alors

$$\alpha - \alpha_1 \text{ est } = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

et par conséquent, en désignant $\text{am}(\alpha - \alpha_1)$ par ψ , comme alors

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} \text{ est } = \alpha - \alpha_1,$$

on aura

$$(59) \dots \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

De cette relation entre ψ , φ et φ_1 , ou (en d'autres termes)
entre les $\text{am}(\alpha - \alpha_1)$, $\text{am} \alpha$ et $\text{am} \alpha_1$

nous déduirons la relation entre les sinus, cosinus etc. de ces amplitudes, c. à d. (en d'autres termes) entre les fonctions elliptiques des arguments mêmes α , α_1 et $\alpha - \alpha_1$.

La formule (59), ou bien

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = d\alpha,$$

donne

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\alpha} &= \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}, & \frac{d\varphi}{d\alpha} &= \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}, \\ \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} &= -k^2 \sin \psi \cos \psi, & \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} &= -k^2 \sin \varphi \cos \varphi; \end{aligned}$$

ou bien, si l'on pose pour abréger

$$\sigma = \psi + \varphi,$$

$$\delta = \psi - \varphi,$$

celles-ci :

$$(60) \dots \left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\alpha} &= \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}, \\ \frac{d\delta}{d\alpha} &= \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}, \end{aligned} \right.$$

$$(61) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2\sigma}{d\alpha^2} \right) \frac{d\sigma'}{d\alpha} = -k^2(\sin\psi\cos\psi + \sin\varphi\cos\varphi) = -k^2\sin\sigma\cos\delta, \\ \left(\frac{d^2\delta}{d\alpha^2} \right) \frac{d\delta'}{d\alpha} = -k^2\cos\sigma\sin\delta, \\ \left(\frac{d\sigma}{d\alpha} \cdot \frac{d\delta}{d\alpha} \right) \sigma'\delta' = -k^2(\sin^2\psi - \sin^2\varphi) = -k^2\sin\sigma\sin\delta; \end{array} \right.$$

où résulte, par division,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(\frac{d\sigma'}{d\alpha} \right)}{\sigma' \cdot \left(\frac{d\delta}{d\alpha} \right)} = \frac{\cos\delta}{\sin\delta}, \text{ ou } \frac{d\sigma'}{\sigma'} = \frac{\cos\delta \cdot d\delta}{\sin\delta} = \frac{d(\sin\delta)}{\sin\delta}, \\ \frac{\left(\frac{d\delta'}{d\alpha} \right)}{\delta' \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\alpha} \right)} = \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}, \text{ ou } \frac{d\delta'}{\delta'} = \frac{\cos\sigma \cdot d\sigma}{\sin\sigma} = \frac{d(\sin\sigma)}{\sin\sigma}; \end{array} \right.$$

en d'autres termes,

$$(62) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (\sigma' =) \frac{d\sigma}{d\alpha} = C \cdot \sin\delta, \\ (\delta' =) \frac{d\delta}{d\alpha} = C_1 \cdot \sin\sigma. \end{array} \right.$$

Comme ces formules subsistent pour chaque valeur de α , l'on en tire, en particulier, pour $\alpha = \alpha_1$ [vu qu'alors φ est $= \varphi_1$, $\psi = 0$, $\sigma = \varphi_1$, $\delta = -\varphi_1$ et, en vertu de (60),

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\alpha} &= 1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}, \\ \frac{d\delta}{d\alpha} &= 1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1} \end{aligned}$$

formules

$$(63) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} -C \cdot \sin\varphi_1 = 1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}, \\ C_1 \cdot \sin\varphi_1 = 1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1} \end{array} \right.$$

pour la détermination des „constantes arbitraires“ C et C_1 .

De plus, comme il résulte des mêmes formules (62) que

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} \cdot \frac{d\delta}{d\alpha} \text{ est } = C \sin\delta \cdot \frac{d\delta}{d\alpha} \text{ et aussi } = C_1 \sin\sigma \cdot \frac{d\sigma}{d\alpha},$$

en conclut

Effectivement on voit bien non-seulement que, tandis que φ num. $< \frac{1}{2}\pi$, la fonction $F(\varphi, 1)$ variera continûment avec φ en y étant

$$F(-\varphi, 1) = -F(\varphi, 1), \quad F(0, 1) = 0,$$

et que de plus

$$(0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi), \quad F(\varphi, 1) \text{ ou } \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \text{ croîtra avec } \varphi,$$

en demeurant toujours

$$= \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (x = \sin \varphi),$$

mais aussi que, pour ce qui concerne φ numér. $= \frac{1}{2}\pi$,

$$F(\frac{1}{2}\pi, 1) \text{ ou } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi}}, \text{ c. à d. } \lim. \int_0^{\frac{1}{2}\pi - \varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi}}$$

en convergeant ε (positif) indéfiniment vers zéro, sera

$$= \infty = -F(-\frac{1}{2}\pi, 1).$$

Et pour prouver ensuite que $F(\varphi, 1)$ est aussi infini pour chaque valeur de φ num. $> \frac{1}{2}\pi$, il suffit de faire voir que, pour chaque valeur de φ_1 positive $< \frac{1}{2}\pi$,

$$F(\frac{1}{2}\pi + \varphi_1, 1), \text{ c. à d. } \lim. \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi - \varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \int_{\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_1}^{\frac{1}{2}\pi + \varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi}} \right]$$

(ε et ε_1 positifs),

sera infini, ce qui évidemment n'a rien de difficile ¹⁾.

1) En effet, comme en général

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi}} \text{ est } = \int_{x=\sin a}^{x=\sin b} \frac{dx}{1-x^2},$$

quand a et b sont positifs et $< \frac{1}{2}\pi$,

mais $= -$ (le même), quand a et b sont situés entre $\frac{1}{2}\pi$ et π ,

et par suite

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi - \varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi}} = \frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ pour } x = \sin(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon) = 1 - \eta \quad (\eta \text{ positif})$$

$$- \frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ pour } x = 0,$$

$$\text{c. à d. } = \frac{1}{2}l\left(\frac{2-\eta}{\eta}\right),$$

$$-1 \equiv 7.403 \text{ u. } 13.5 \times (-2)(-3)(-4) - 1 = -7.$$

$$-1 \equiv 7.31 \text{ u. } 5(-2)(-3)(-4) + 1 = -7.17,$$

Abweichungen 6) kann man leicht in Fakultäten ausdrücken, wenn man die m und ebenso die n unter sich gleichmäßig $\frac{p-1}{2}$ geschrieben, so wird auch $p-r-1=1$ und für die erste und letzte Form in 6):

7)

$$(n_1 p \pm \frac{p-1}{2}) \dots (n_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

8)

$$(n_1 p \pm \frac{p-1}{2}) \dots (n_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

Die oberen Seite gelten die oberen und unteren Zeichen, die oberen Zeichen auf der rechten Seite gelten, die unteren für eine von der Form $4n+1$, die unteren für eine von der Form $4n+3$.

Die oberen und unteren Formen in 6) fallen im vorliegenden Falle zusammen, sie unterscheiden sich aber hinsichtlich des Vorzeichens, und man erhält:

9)

$$(n_1 p \pm 1)(n_2 p \pm 2) \dots (n_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

$$(n_1 p \pm 1)(n_2 p \pm 2) \dots (n_r p \pm \frac{p-1}{2}) \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p.$$

Die oberen Zeichen auf der rechten Seite gelten, wenn p von der Form $4n+1$, die unteren, wenn sie von der Form $4n+3$ sind, und die correspondirenden m und n einander entsprechen aus 7) und 8).

10)

$$[(n_1 p \pm 1) \dots (n_r p \pm \frac{p-1}{2})]^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

so,
Fac

$$[(n_1 p \pm 1) \dots (n_r p \pm \frac{p-1}{2})]^2 \equiv \mp 1, \text{ Mod. } p,$$

$$\text{Surf. Qd.} = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)(\delta - \beta) \text{tang}(X, Y), \dots \text{(CCIII)}$$

on voit que

Théorème X. L'aire du quadrilatère circonscriptible convexe est égale au demi-produit des différences des segments opposés des côtés, multiplié par la tangente de l'angle compris entre les diagonales.

III. Surfaces des triangles formés chacun par deux côtés et une diagonale. Puisque le triangle

$$\frac{PQS}{PQRS} = \frac{PU}{PR} = \frac{X'}{X} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

il vient

$$\left. \begin{aligned} PQS &= \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \cdot \text{Surf. Qd.}, \\ PQR &= \frac{\beta}{\beta + \delta} \cdot \text{Surf. Qd.}, \\ QRS &= \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \cdot \text{Surf. Qd.}, \\ PRS &= \frac{\delta}{\beta + \delta} \cdot \text{Surf. Qd.} \end{aligned} \right\} \dots \text{(CCIV)}$$

Ces valeurs nous donnent

$$\frac{\text{Surf. Qd.}}{(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)} = \frac{SPQ}{\alpha(\beta + \delta)} = \frac{PQR}{\beta(\alpha + \gamma)} = \frac{QRS}{\gamma(\beta + \delta)} = \frac{RSP}{\delta(\alpha + \gamma)}. \text{ (CCV)}$$

III. Angles compris entre les côtés et les diagonales. Le triangle *PQS* nous donne, par suite de (CCIV),

$$\frac{1}{2}(\alpha + \delta) \cdot X \sin(A, X) = \frac{\delta}{\beta + \delta} \cdot \text{Surf. Qd.};$$

il vient donc

$$\left. \begin{aligned} \sin(A, X) &= \frac{\delta}{X} \cdot \frac{2 \text{Surf. Qd.}}{(\delta + \alpha)(\beta + \delta)}, \\ \sin(B, X) &= \frac{\beta}{X} \cdot \frac{2 \text{Surf. Qd.}}{(\alpha + \beta)(\beta + \delta)}, \\ \sin(C, X) &= \frac{\beta}{X} \cdot \frac{2 \text{Surf. Qd.}}{(\beta + \gamma)(\beta + \delta)}, \\ \sin(D, X) &= \frac{\delta}{X} \cdot \frac{2 \text{Surf. Qd.}}{(\gamma + \delta)(\beta + \delta)}; \end{aligned} \right\} \dots \text{(CCVI)}$$

et, pareillement,

$$\left. \begin{aligned} UV &= \frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2 - \gamma^2} \cdot X, \\ UW &= \frac{2\beta\delta}{\beta^2 - \delta^2} \cdot Y, \\ VW &= \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)} \cdot Z. \end{aligned} \right\} \dots \quad (C)$$

119. Angles du triangle formé par les trois diagonales.
avons

$$\frac{\sin UWV}{UV} = \frac{\sin UVW}{UW} = \frac{\sin VUW}{VW},$$

ou

$$\frac{(\alpha^2 - \gamma^2) \sin UWV}{\alpha\gamma X} = \frac{(\beta^2 - \delta^2) \sin UVW}{\beta\delta Y} = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2) \sin V}{(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)}$$

et, comme $\sin VUW = \frac{2 \text{Surf. Qd.}}{XY}$, il vient

$$\left. \begin{aligned} \sin UWV &= \frac{2\alpha\gamma(\beta^2 - \delta^2) \text{Surf. Qd.}}{(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma) YZ}, \\ \sin UVW &= \frac{2\beta\delta(\alpha^2 - \gamma^2) \text{Surf. Qd.}}{(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma) XZ}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (CC)$$

120. Aire du triangle formé par les trois diagonales.
triangle est

$$UVW = \frac{1}{2} UV \cdot UW \cdot \sin(X, Y)$$

ou

$$UVW = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha\gamma X}{\alpha^2 - \gamma^2} \cdot \frac{2\beta\delta Y}{\beta^2 - \delta^2} \cdot \sin(X, Y),$$

qu'on peut écrire

$$UVW = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)} \cdot \frac{1}{2} XY \sin(X, Y);$$

mais

$$\frac{1}{2} XY \sin(X, Y) = \text{Surf. Qd.};$$

il vient donc

$$UVW = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma)(\beta + \delta)(\beta - \delta)} \cdot \text{Surf. Qd.} \quad (CCX)$$

121. Aire du quadrilatère à angle rentrant. On a le quadrilatère *PMRN* ou

$$\text{Surf. Q'd.} = PMN - RMN = \frac{1}{2} PM \cdot PN \cdot \sin(A, B) - \frac{1}{2} RM \cdot RN \cdot \sin(C)$$

joint les points de concours des tangentes dans le cercle nous formons deux triangles rectangles qui donnent

$$x+y=2a\sin\alpha,\quad x-y=2b\sin\beta,\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

d'où l'on tire

$$\left. \begin{aligned} x &= a\sin\alpha + b\sin\beta, \\ y &= a\sin\alpha - b\sin\beta, \end{aligned} \right\} .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

et, en ayant égard aux valeurs (CCXCII) et (CCXCVI),

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)} \\ &\quad + \frac{R-R'}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')}, \\ y &= \frac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)} \\ &\quad + \frac{R'-R}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')}; \end{aligned} \right\} \quad (CC)$$

telles sont les valeurs des deux diagonales.

186. Si nous introduisons les valeurs (CCXCVI) dans égalités (2), nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} x+y &= 2D\sin\alpha\cos\beta, \\ x-y &= 2D\sin\beta\cos\alpha, \end{aligned} \right\} .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

qui donnent

$$x=D\sin(\alpha+\beta),\quad y=D\sin(\alpha-\beta);\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (CCC)$$

d'où

$$\frac{x}{y}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (CCC)$$

et, par suite

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{4RR'\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \\ y^2 &= \frac{4RR'\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \right\} .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (CC)$$

187. Des relations (4) on tire encore

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\text{tang}\alpha}{\text{tang}\beta},\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (CCC)$$

qui démontre que:

Théorème VI. Dans tout quadrilatère circonscrit

Ainsi

Théorème I. Dans tout rectangle, la tangente l'angle des diagonales est égale au double produit côtés, divisé par la différence des carrés de ces mêmes côtés.

On a ensuite

$$\sin \frac{1}{2}(x, y) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \frac{1}{2}(x, y) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\text{tang} \frac{1}{2}(x, y) = \frac{b}{a} \quad (\text{CCCL})$$

Donc

Théorème II. Dans tout rectangle, la tangente du double angle des diagonales est égale au rapport des côtés.



	Pages.
Valeur des diagonales	337
Angle des diagonales	337
Angle des côtés latéraux	338
Droite qui joint les milieux des deux bases	339
Surface du trapèze	339

§. XVIII. Trapèze circonscriptible.

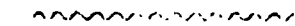
Rayon du cercle inscrit	340
Valeur des diagonales	340
Angle des diagonales	340
Angle des côtés latéraux	341
Surface du trapèze	341
Distances des sommets au centre du cercle inscrit	341
Angles du trapèze	342
Eléments du quadrilatère inscrit	342

§. XIX. Trapèze étoilé.

Relations entre les côtés et les diagonales	343
Valeur des diagonales	344
Angle des diagonales	344
Autres éléments du trapèze étoilé	344
Surface du trapèze	345

§. XX. Parallélogramme.

212 Relations entre les côtés, les angles et les diagonales	346
Propriétés angulaires du parallélogramme	346
Surface du parallélogramme	347
Propriétés angulaires du rectangle	347



E r r a t u m.

Le premier facteur du numérateur de la dernière formule pour $\tan(x, y)$
194 (sous $\sqrt{}$) est $a + b + d - c$ ou $a + b - c + d$ au lieu de $a + b + c + d$.



\cdot $=$
 $-$ \cdot
 $=$

$=$
 $= \cdot$
 $= \cdot$

\cdot

$-$

$= \cdot$

\cdot
 \cdot
 $\cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$
 $\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot$

$\cdot \cdot$

\cdot

\cdot

22
 von
 lie

W
 stimme

\cdot



$$\alpha(\beta c - \gamma b) + \beta(\gamma a - \alpha c) + \gamma(\alpha b - \beta a) = 0,$$

$$a(\beta c - \gamma b) + b(\gamma a - \alpha c) + c(\alpha b - \beta a) = 0$$

ist, so ergeben sich aus den Formeln 4) unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$5) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \\ \alpha x + b y + c z = 0. \end{array} \right.$$

Ferner ergibt sich aus denselben Formeln:

$$a + \gamma y - \beta z = a - \frac{\gamma(\gamma a - \alpha c) - \beta(\alpha b - \beta a)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$b + \alpha z - \gamma x = b - \frac{\alpha(\alpha b - \beta a) - \gamma(\beta c - \gamma b)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$c + \beta x - \alpha y = c - \frac{\beta(\beta c - \gamma b) - \alpha(\gamma a - \alpha c)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

oder:

$$a + \gamma y - \beta z = a - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)a - \alpha(\alpha a + \beta b + \gamma c)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$b + \alpha z - \gamma x = b - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)b - \beta(\alpha a + \beta b + \gamma c)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$c + \beta x - \alpha y = c - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)c - \gamma(\alpha a + \beta b + \gamma c)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2};$$

also:

$$6) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} a + \gamma y - \beta z = \frac{\alpha(\alpha a + \beta b + \gamma c)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ b + \alpha z - \gamma x = \frac{\beta(\alpha a + \beta b + \gamma c)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ c + \beta x - \alpha y = \frac{\gamma(\alpha a + \beta b + \gamma c)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}; \end{array} \right.$$

folglich nach dem Obigen:

$$7) \dots \dots \dots u^2 = \frac{(\alpha a + \beta b + \gamma c)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

oder:

$$8) \dots \dots \dots u = \pm \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

man man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die
 esse $\alpha a + \beta b + \gamma c$ positiv oder negativ ist; dies ist der kleinste
 rth oder das Minimum von u .

und B auf AB errichtete Perpendikel werden in diesem offenbar die beiden verlangten, durch A und B gehenden der parallelen Geraden sein.

§. 3.

Wir wollen jetzt die Entfernung, eigentlich die kürzeste Entfernung, zweier einander parallelen geraden Linien, deren Gleichungen gegeben sind, von einander bestimmen.

Die Gleichungen der beiden Geraden seien:

$$\left. \begin{array}{l} (x - a_0) \cos \beta = (y - b_0) \cos \alpha, \\ (y - b_0) \cos \gamma = (z - c_0) \cos \beta, \\ (z - c_0) \cos \alpha = (x - a_0) \cos \gamma \\ \dots \dots \dots \text{und} \\ (x - a_1) \cos \beta = (y - b_1) \cos \alpha, \\ (y - b_1) \cos \gamma = (z - c_1) \cos \beta, \\ (z - c_1) \cos \alpha = (x - a_1) \cos \gamma; \end{array} \right\}$$

wie man dies der Kürze wegen bekanntlich auch zu schreiben pflegt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x - a_0}{\cos \alpha} = \frac{y - b_0}{\cos \beta} = \frac{z - c_0}{\cos \gamma} \\ \dots \dots \dots \text{und} \\ \frac{x - a_1}{\cos \alpha} = \frac{y - b_1}{\cos \beta} = \frac{z - c_1}{\cos \gamma}. \end{array} \right\}$$

Nehmen wir nun in den beiden gegebenen Geraden zwei Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ und $(x_1 y_1 z_1)$ so an, dass die durch diese Punkte bestimmte Gerade auf den beiden gegebenen Geraden senkrecht ist; so ist nach 1):

$$\left. \begin{array}{l} (x_0 - a_0) \cos \beta = (y_0 - b_0) \cos \alpha, \\ (y_0 - b_0) \cos \gamma = (z_0 - c_0) \cos \beta, \\ (z_0 - c_0) \cos \alpha = (x_0 - a_0) \cos \gamma \\ \dots \dots \dots \text{und} \\ (x_1 - a_1) \cos \beta = (y_1 - b_1) \cos \alpha, \\ (y_1 - b_1) \cos \gamma = (z_1 - c_1) \cos \beta, \\ (z_1 - c_1) \cos \alpha = (x_1 - a_1) \cos \gamma; \end{array} \right\}$$

wenn man subtrahirt:

Beziehung

$$\begin{aligned} \dots & \dots -i_1 \cos \alpha, \\ \dots & \dots -i_2 \cos \beta, \\ \dots & \dots -i_3 \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\dots \dots \cos \alpha,$$

$$\dots \dots \cos \beta,$$

$$\dots \dots \cos \gamma,$$

$$\dots \dots \cos \alpha,$$

$$\dots \dots \cos \beta,$$

$$\dots \dots \cos \gamma,$$

$$\dots \dots \cos \alpha,$$

at

ou

deren
ist, k
rade :

An
mit der
so liegt
man kan.
ziehen;
Berührend
und *B* geht
ander die
ist, so geht

Beziehung

$$\cos \gamma =$$

Die beiden Kräfte P und Π von einander heisst die Breite des Paares. Das Product der Breite in den absoluten Werth der Kräfte heisst das Moment des Paares.

§. 5.

Wir wollen jetzt die im vorhergehenden Paragraphen näher charakterisirten Elemente eines beliebigen Paares durch

$$x_0, y_0, z_0; \quad \xi_0, \eta_0, \zeta_0; \quad \alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \quad P_0, \Pi_0$$

bezeichnen.

Die von den Punkten $(x_0 y_0 z_0)$ und $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ausgehenden, durch Winkel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ bestimmten Geraden denken wir uns auf Ebene der xy — wofür übrigens auch jede andere Coordinatenebene gesetzt werden kann — projecirt, und bezeichnen die diesen, von den Punkten $(x_0 y_0)$ und $(\xi_0 \eta_0)$ ausgehenden Projectionen mit den positiven Theilen der Axen der x, y eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α_0', β_0' ; und die Gleichungen der Geraden, in denen die beiden Projectionen liegen:

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cos \beta_0' &= (y - y_0) \cos \alpha_0', \\ (x - \xi_0) \cos \beta_0' &= (y - \eta_0) \cos \alpha_0'; \end{aligned}$$

Die Gleichungen dieser Geraden sind aber nach den Lehren der analytischen Geometrie auch:

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cos \beta_0 &= (y - y_0) \cos \alpha_0, \\ (x - \xi_0) \cos \beta_0 &= (y - \eta_0) \cos \alpha_0; \end{aligned}$$

Setzen wir nun:

$$\cos \alpha_0 = k_0 \cos \alpha_0',$$

so ist, weil:

$$\begin{aligned} (x - x_0) \cdot k_0 \cos \beta_0 &= (y - y_0) \cdot k_0 \cos \alpha_0, \\ (x - \xi_0) \cdot k_0 \cos \beta_0 &= (y - \eta_0) \cdot k_0 \cos \alpha_0 \end{aligned}$$

offenbar auch:

$$\cos \beta_0 = k_0 \cos \beta_0';$$

$$\cos \alpha_0^2 + \cos \beta_0^2 = k_0^2 (\cos \alpha_0'^2 + \cos \beta_0'^2),$$

weil:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0^2 + \cos \beta_0^2 &= 1 - \cos \gamma_0^2 = \sin \gamma_0^2, \\ \cos \alpha_0'^2 + \cos \beta_0'^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{(y_0 - \eta_0) \cos \gamma_0 - (z_0 - \zeta_0) \cos \beta_0}{\sqrt{\left\{ \begin{aligned} &[(x_0 - \xi_0) \cos \beta_0 - (y_0 - \eta_0) \cos \alpha_0]^2 \\ &+ [(y_0 - \eta_0) \cos \gamma_0 - (z_0 - \zeta_0) \cos \beta_0]^2 \\ &+ [(z_0 - \zeta_0) \cos \alpha_0 - (x_0 - \xi_0) \cos \gamma_0]^2 \end{aligned} \right\}}},$$

$$\cos \psi_0 = \frac{(z_0 - \zeta_0) \cos \alpha_0 - (x_0 - \xi_0) \cos \gamma_0}{\sqrt{\left\{ \begin{aligned} &[(x_0 - \xi_0) \cos \beta_0 - (y_0 - \eta_0) \cos \alpha_0]^2 \\ &+ [(y_0 - \eta_0) \cos \gamma_0 - (z_0 - \zeta_0) \cos \beta_0]^2 \\ &+ [(z_0 - \zeta_0) \cos \alpha_0 - (x_0 - \xi_0) \cos \gamma_0]^2 \end{aligned} \right\}}},$$

$$\cos \chi_0 = \frac{(x_0 - \xi_0) \cos \beta_0 - (y_0 - \eta_0) \cos \alpha_0}{\sqrt{\left\{ \begin{aligned} &[(x_0 - \xi_0) \cos \beta_0 - (y_0 - \eta_0) \cos \alpha_0]^2 \\ &+ [(y_0 - \eta_0) \cos \gamma_0 - (z_0 - \zeta_0) \cos \beta_0]^2 \\ &+ [(z_0 - \zeta_0) \cos \alpha_0 - (x_0 - \xi_0) \cos \gamma_0]^2 \end{aligned} \right\}}};$$

wo man den Nenner auch unter der Form :

$$\sqrt{\left\{ \begin{aligned} &(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2 + (z_0 - \zeta_0)^2 \\ &- [(x_0 - \xi_0) \cos \alpha_0 + (y_0 - \eta_0) \cos \beta_0 + (z_0 - \zeta_0) \cos \gamma_0]^2 \end{aligned} \right\}}$$

darstellen kann; auch lässt sich nach §. 8. schreiben:

$$\cos \varphi_0 = \frac{(y_0 - \eta_0) \cos \gamma_0 - (z_0 - \zeta_0) \cos \beta_0}{E_0},$$

$$\cos \psi_0 = \frac{(z_0 - \zeta_0) \cos \alpha_0 - (x_0 - \xi_0) \cos \gamma_0}{E_0},$$

$$\cos \chi_0 = \frac{(x_0 - \xi_0) \cos \beta_0 - (y_0 - \eta_0) \cos \alpha_0}{E_0};$$

also :

$$E_0 \cos \varphi_0 = (y_0 - \eta_0) \cos \gamma_0 - (z_0 - \zeta_0) \cos \beta_0,$$

$$E_0 \cos \psi_0 = (z_0 - \zeta_0) \cos \alpha_0 - (x_0 - \xi_0) \cos \gamma_0,$$

$$E_0 \cos \chi_0 = (x_0 - \xi_0) \cos \beta_0 - (y_0 - \eta_0) \cos \alpha_0.$$

Hieraus erhellet auch, dass die Grössen

$$(x_0 - \xi_0) \cos \beta_0 - (y_0 - \eta_0) \cos \alpha_0,$$

$$(y_0 - \eta_0) \cos \gamma_0 - (z_0 - \zeta_0) \cos \beta_0,$$

$$(z_0 - \zeta_0) \cos \alpha_0 - (x_0 - \xi_0) \cos \gamma_0$$

nie zugleich verschwinden, weil, wenn dies der Fall wäre, da im Fall eines Kräftepaars E_0 nicht verschwindet, die Grössen

also, weil diese Gleichung unabhängig von besonderen Werthen von x gilt:

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$A(x - \xi) + B(y - \eta) + C(z - \zeta) = 0,$$

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0$$

ergibt sich, dass, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$A = G \{ (y - \eta) \cos \gamma - (z - \zeta) \cos \beta \},$$

$$B = G \{ (z - \zeta) \cos \alpha - (x - \xi) \cos \gamma \},$$

$$C = G \{ (x - \xi) \cos \beta - (y - \eta) \cos \alpha \}$$

ist, wo der Factor G nicht verschwindet, weil nach der Voraussetzung die Grössen A, B, C nicht zugleich verschwinden.

Nach §. 3. ist:

$$\begin{aligned} E^2 = & \{ (x - \xi) \cos \beta - (y - \eta) \cos \alpha \}^2 \\ & + \{ (y - \eta) \cos \gamma - (z - \zeta) \cos \beta \}^2 \\ & + \{ (z - \zeta) \cos \alpha - (x - \xi) \cos \gamma \}^2, \end{aligned}$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$E^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{G^2},$$

und daher:

$$E = \pm \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{G} = \pm \frac{M}{G},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem G positiv oder negativ ist. Folglich ist:

$$\pm GE = M,$$

und daher, weil nach dem Obigen:

$$\wp E = M$$

ist:

$$\wp = \pm G,$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem G positiv oder negativ ist. Weil also:

$$G = \pm \wp$$

ist, so ist nach dem Obigen:

... ..2. Entwicklung

$$\begin{aligned} - \dots - \dots \cos \beta, \\ \dots - \dots \cos \gamma, \\ - \dots - \dots \cos \alpha: \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} - \dots - \dots \sin \alpha &= C, \\ \dots - \dots \sin \beta &= A, \\ - \dots - \dots \sin \gamma &= B: \end{aligned}$$

... ..:ennen nat. jenachdem

$$\begin{aligned} \dots - \dots \cos \beta, \\ \dots - \dots \cos \gamma, \\ \dots - \dots \cos \alpha \end{aligned}$$

... ..:gabe zu lösen:

... ..:nach gleich D setzen,
... ..:nachdem die Grössen

$$\begin{aligned} \dots - \dots \cos \beta, \\ \dots - \dots \cos \gamma, \\ \dots - \dots \cos \alpha \end{aligned}$$

... ..:man muss also die
... ..:absoluter Werth D
... ..:nach der durch die
... ..:sammen Richtung hin

...

$$\begin{aligned} \dots - \dots \cos \beta, \\ \dots - \dots \cos \gamma, \\ \dots - \dots \cos \alpha \end{aligned}$$

...

fol.
lie:

ist:

$$\dots - \dots \cos \beta$$

$$\dots - \dots \cos \gamma$$

$$P = + p$$

, also die Kraft an dem Punkte (xyz) nach der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung hin wirken lassen. Weil in diesem Falle

$$P\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}$$

ist, so ist nach §. 6. die Drehung des Paares positiv.

Wenn C positiv und

$$(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha$$

ist, also

$$C\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}$$

ist, so muss man

$$P = - p$$

, also die Kraft an dem Punkte (xyz) nach der durch die Winkel $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$ bestimmten Richtung hin wirken lassen. Weil in diesem Falle

$$P\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}$$

ist, so ist nach §. 6. die Drehung des Paares positiv.

Wenn C negativ und

$$(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha$$

ist, also

$$C\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}$$

ist, so muss man

$$P = - p$$

, also die Kraft an dem Punkte (xyz) nach der durch die Winkel $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$ bestimmten Richtung hin wirken lassen. Weil in diesem Falle

$$P\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}$$

ist, so ist nach §. 6. die Drehung des Paares negativ.

Wenn C negativ und

$$(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha$$

ist, also

$$C\{(x-\xi)\cos\beta - (y-\eta)\cos\alpha\}$$

$$\cos \Omega = \pm \frac{A \cos \theta' + B \cos \omega' + C \cos \bar{\omega}',}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

so nach §. 14.:

$$\cos \Omega = \pm \frac{A \cos \theta' + B \cos \omega' + C \cos \bar{\omega}',}{M},$$

folglich, wenn man im Zähler und Nenner dieses Bruchs mit

$$\cos \Omega = \pm \frac{AL' + BM' + CN'}{R'M}.$$

aber nach §. 14.:

$$A = \mathfrak{L}_1 - N'Y' + M'Z',$$

$$B = \mathfrak{M}_1 - L'Z' + N'X',$$

$$C = \mathfrak{N}_1 - M'X' + L'Y'$$

so ist:

$$AL' + BM' + CN' = L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1,$$

folglich:

$$\cos \Omega = \pm \frac{L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1}{R'M}.$$

nach dem Obigen ist nun:

$$(L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1)^2 = (L'^2 + M'^2 + N'^2)\mathfrak{M}^2 = R'^2\mathfrak{M}^2,$$

so:

$$L'\mathfrak{L}_1 + M'\mathfrak{M}_1 + N'\mathfrak{N}_1 = R'\mathfrak{M},$$

folglich, ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen

einander:

$$\cos \Omega = \pm \frac{\mathfrak{M}}{M}.$$

daraus folgt:

$$\sin \Omega^2 = \frac{M^2 - \mathfrak{M}^2}{M^2} = \frac{p^2 R'^2}{M^2},$$

so:

$$pR' = M \sin \Omega.$$

Nimmt man, was verstatet ist, den Winkel Ω spitz, so ist:

$$\mathfrak{M} = M \cos \Omega, \quad pR' = M \sin \Omega.$$

Schliesslich wollen wir noch die Entfernung des Punktes (5) von dem Anfange der Coordinaten bestimmen. Nach dem Obigen ist:

... verhält. entsteht, ist zusammen-
 ... in jedem Ende aus einem
 ... Kreises r , das
 ... der geschnittenen
 ... Rotation der ganzen Seite
 ... ist die vom Abschnitt
 ... Zusatz zu Hülfsatz 2)

$$T_1 = T_{11}.$$

... der Axe vom Abschnitt DJ'
 ...

$$T_2 = T_{21}.$$

... äussersten Abschnitt
 ... durch Rotation von
 ... — Jeder der von den
 ... gestumpften Kegel hat
 ...

$$T_3 = T_{31}.$$

... Kegelstumpfs bedeutet.

... erhält man die ganze
 ... Oberfläche:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots$$

... bedeutet.

... anderen Perimeter-
 ... gestumpften Kegeln und
 ... Vertiefung. Die abge-
 ... Fläche von der Grösse

$$T_4 = T_{41}.$$

... die Länge der Rota-
 ... Kegelmantel an den Enden

... Seite der Axe ge-
 ... gestaltete,
 ... Fläche von der-
 ... durch Rotation des

als

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1)	3	4	5
2)	13	14	15
3)	51	52	53
4)	193	194	195
5)	723	724	725
6)	2701	2702	2703
7)	10083	10084	10085

u. s. w.

Man soll rationale Dreiecke finden, in welchen ein Winkel doppelt so gross ist, als ein anderer:

$$a = (\alpha^2 + \beta^2)^2, \quad b = 2(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2), \quad c = (3\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - 3\beta^2).$$

Es ergeben sich:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1)	25	30	11
2)	25	40	39
3)	289	510	611
4)	841	1218	923
5)	4225	4290	131

u. s. w.

Die Grösse

$$\begin{aligned} & \{ (a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)^2(b-d)^2 + (a-d)^2(b-c)^2 \}^3 \\ 8 & \left\{ \begin{aligned} & (a-b)^3(b-c)^3(c-d)^3(d-a)^3 \\ & + (a-b)^3(b-d)^3(d-c)^3(c-a)^3 \\ & + (c-b)^3(b-d)^3(d-a)^3(a-c)^3 \end{aligned} \right\} \\ & 24(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2 \end{aligned}$$

: identisch gleich Null.

(J. J. Walker.)

Fig. 3.

α

M'

E

(b)

D

Fig. 7.

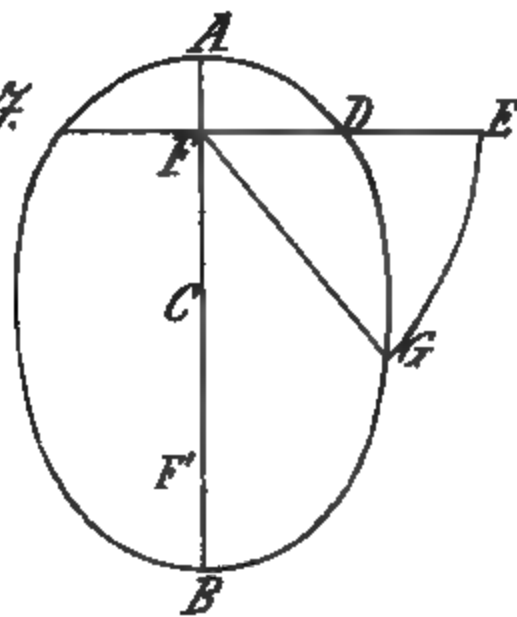


Fig. 6.

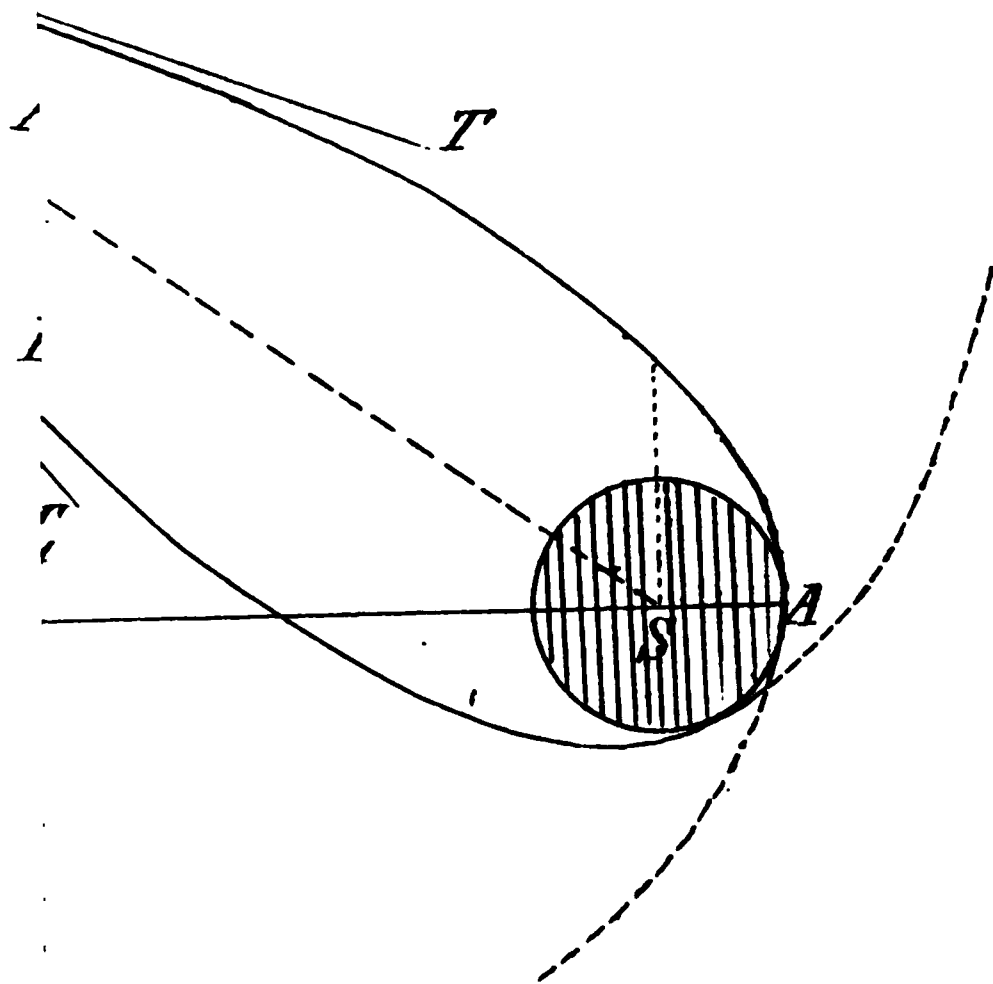
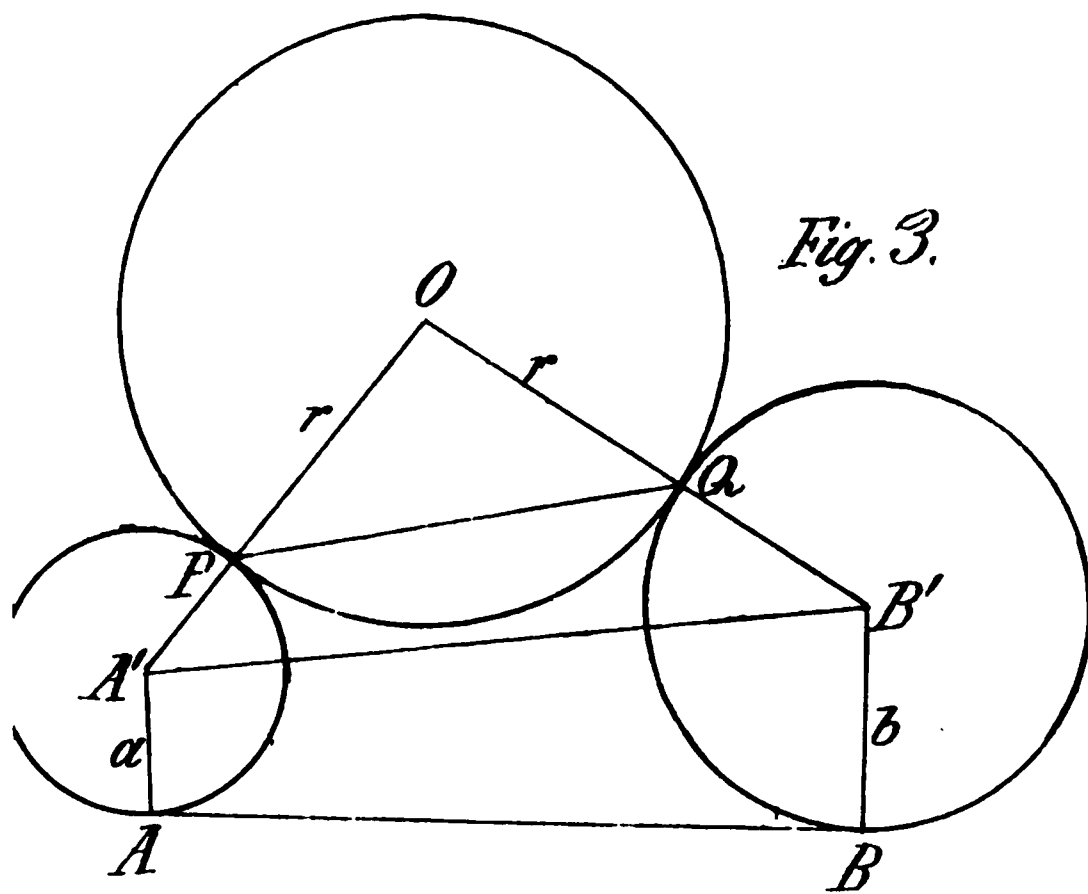


Fig. 3.



\sin
 \cos

x

Gr

